සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි / All Rights Reserved

බස්නාහිර පළාත් අධ්‍යාපන දෙපාර්තමේන්තුව
Western Province Educational Department

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2023 (2024)
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, 2023 (2024)

සංයුක්ත ගණිතය I Combined Mathematics I	10 S I	2023.12.14 / 08.30 - 11.40

AL API (PAPERS GROUP)

B කොටස

■ ප්‍රශ්න පහකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

11. (a) සියලු $x \in \mathbb{R}$ සඳහා, $F(x) \equiv px^2 + qx + r$; $p \neq 0, (p,q,r) \in \mathbb{R}$ යැයි ගනිමු. සමීකරණය විසඳීමෙන් හෝ අන්අයුරකින් හෝ $F(x)=0$ වර්ගජ සමීකරණයට තාත්වික මූල පවතී නම්, $\Delta \geq 0$ වන බව සාධනය කරන්න. මෙහි $\Delta = q^2 - 4pr$ වේ.

තවද $(p,q,r) \in \mathbb{Q}$ වන විට $F(x)=0$ වර්ගජ සමීකරණයට තාත්වික **පරිමේය මූල පැවතීමට** අවශ්‍යතාව ලියා දක්වන්න.

තවදුරටත්, 1 යන්න $F(x)=0$ හි මූලයක් නම්, $p+q+r=0$ වන බව ද පෙන්වන්න.

දැන් $2ax^2 - (2a+b+c)x + b + c = 0$ $a \neq 0$, $(a,b,c) \in \mathbb{Q}$ සමීකරණයේ මූල α හා β යැයි ගනිමු.

$\dfrac{1}{\alpha}$ හා $\dfrac{1}{\beta}$ මූල වන වර්ගජ සමීකරණය $G(x)=0$ මගින් ලබා දේ නම්, $G(x)$ ලියා දක්වන්න.

$G(x)=0$ හි විවේචකය a, b හා c ඇසුරෙන් ලියා දක්වා **ඒ නයින්**, $\dfrac{1}{\alpha}$ හා $\dfrac{1}{\beta}$ පරිමේය වන බව **අපෝහනය** කරන්න.

තවද b, a හා c පිළිවෙලින් සමාන්තර ශ්‍රේණියක අනුයාත පද ලෙස පිහිටයි නම්, $G(x)=0$ හි මූල තාත්වික සමපාත වන බව ද **අපෝහනය** කරන්න.

(b) $H(x)$ යනු මාත්‍රය 3 වූ බහුපදයක් යැයි ගනිමු. $H(x)$ යන්න $(x-1)$, $(x-2)$ හා $(x-3)$ යන ඒකජ මගින් වෙන වෙනම බෙදූ විට ශේෂය 7 බව දී ඇත. තවදුරටත්, $H(x)$ යන්න $(x-4)$ න් බෙදූ විට ශේෂය 1 බව දී ඇත්නම්, $H(x) \equiv (ax+b)(x-2)(x-3)+c$ ආකාර වන පරිදි a, b හා c නිඛිල අගයන්න.

12. (a) $a, b \in \mathbb{R}$ යැයි ගනිමු. x හි බල **ආරෝහණය** වන පරිදි $(ax+by)^n : n \in \mathbb{Z}^+$ ප්‍රසාරණය ලියා ලියන්න.

දැන් $\left(ax + \dfrac{1}{x}\right)^n$ හි ප්‍රසාරණය සලකමු. මෙහි x වලින් ස්වායත්ත පදයේ සංගුණකය n හා a ඇසුරෙන් ලියා දක්වන්න.

මෙම ප්‍රසාරණයේ හතර වන පදය $\dfrac{5}{54}$ බව දී ඇත්නම්, n හා a හි අගය සොයන්න.

තවද $\left(ax + \dfrac{1}{x}\right)^n$ හි ප්‍රසාරණයේ මැද පදය ලියා දක්වන්න.

තවදුරටත් මෙම ප්‍රසාරණයේ සංගුණකවල එකතුව $\left(\dfrac{\alpha+1}{\alpha}\right)^m$ වන පරිදි α හා m නිඛිල **අපෝහනය** කරන්න.

(b) $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා, $A(r+1)(3r+5)-B(r+2)(3r-1) \equiv 6r^2+19r+17$ වන පරිදි A හා B තාත්ත්වික නියත සොයන්න. දැන් $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා, $U_r = \dfrac{6r^2+19r+17}{(3r-1)(3r+2)(3r+5)}$ යැයි ගනිමු.

$U_r = k \cdot V_r - V_{r+1}$ වන පරිදි V_r ලියා දක්වන්න. මෙහි k යනු නිර්ණය කළ යුතු ධන නිඛිලයකි.

ඒ නයින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ, $\dfrac{U_r}{3^r} = f(r) - f(r+1)$ වන පරිදි $f(r)$ ලියා දක්වමින්, $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} \frac{U_r}{3^r} = \frac{1}{5} - \frac{(n+2)}{(3n+2)(3n+5)} \cdot \frac{1}{3^n}$ බව පෙන්වන්න.

තවදුරටත්, $\displaystyle\sum_{r=1}^{\infty} \frac{U_r}{3^r}$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව පෙන්වා, එහි ඓක්‍යය සොයන්න.

ඒ නයින්, $\displaystyle\sum_{r=2}^{\infty} \frac{U_r}{3^{r-1}}$ හි අගය **අපෝහනය** කරන්න.

13. (a) $a \in \mathbb{R}$ වන පරිදි, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2a+1 & 3 \\ 2a-1 & a \end{pmatrix}$ යැයි ගනිමු. $\mathbf{A}$ හි ප්‍රතිලෝම න්‍යාසය $\mathbf{A}^{-1}$ **පවතින පරිදි** a ට ගත හැකි අගයයන් සොයන්න.

තවද $a \in \mathbb{Z}$ වන පරිදි $\mathbf{A}$ හි නිශ්චායකය 1 බව දී ඇත්නම් a හි අගය සොයන්න.

එම a අගය සඳහා $\mathbf{A}$ හා $\mathbf{A}^{-1}$ ලියා දක්වන්න.

$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ හා $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ වන පරිදි $\mathbf{B}$ හා $\mathbf{C}$ තීර න්‍යාස සොයන්න.

තවද $\mathbf{BC}^{\mathrm{T}}$ න්‍යාසය සොයන්න. මෙහි $\mathbf{C}^{\mathrm{T}}$ යනු $\mathbf{C}$ හි පෙරලුම් න්‍යාසයයි.

(b) $x, y \in \mathbb{R}$ හා $z \in \mathbb{C}$ යැයි ගනිමු. $z = x+iy$ වන පරිදි $\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z)$ හා $|z|$ ලියා දක්වන්න.

$|z|^2 = (\mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(z))^2$ බව පෙන්වන්න.

$-\pi < \theta \le \pi$ සඳහා $z = \cos\theta + i\sin\theta$ යැයි ගනිමු. ආර්ගන්ඩ් සටහනක z නිරූපණය කරන්න.

$\omega = \dfrac{-1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ බව දී ඇත්නම්, ω හා ω^2 සංකීර්ණ සංඛ්‍යා z හි පථය මත පිහිටන බව පෙන්වා

ඒ නයින්, $|\omega - 1| = |\omega^2 - 1| = |\omega - \omega^2|$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

(c) $z_1 = 1 + \sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right) + i\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ හා $z_2 = 1 + \sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right) - i\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ යැයි ගනිමු.

$z_1 = (1+\cos\theta) + i\sin\theta$; $\dfrac{\pi}{4} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ වන පරිදි θ අගයන්න. තවදුරටත්,

z_1 හා z_2 සංකීර්ණ සංඛ්‍යා, $z_n = r_n(\cos\theta_n + i\sin\theta_n)$; $n = 1, 2$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න.

මෙහි r_n හා $\theta_n \left(\dfrac{-\pi}{4} < \theta_n < \dfrac{\pi}{4}\right)$ යනු නිර්ණය කළ යුතු තාත්ත්වික නියත වෙයි. දැන් $\omega = \dfrac{z_1}{z_2}$ යැයි ගනිමු. **ද මුවාවර් ප්‍රමේයය භාවිතයෙන් හෝ අන් අයුරකින් හෝ** $\mathrm{Re}\left(\omega^{\frac{8}{3}}\right) = -1$ බවත්, $\mathrm{Im}\left(\omega^{\frac{8}{3}}\right) = 0$ බවත් අපෝහනය කරන්න.

AL API (PAPERS GROUP)

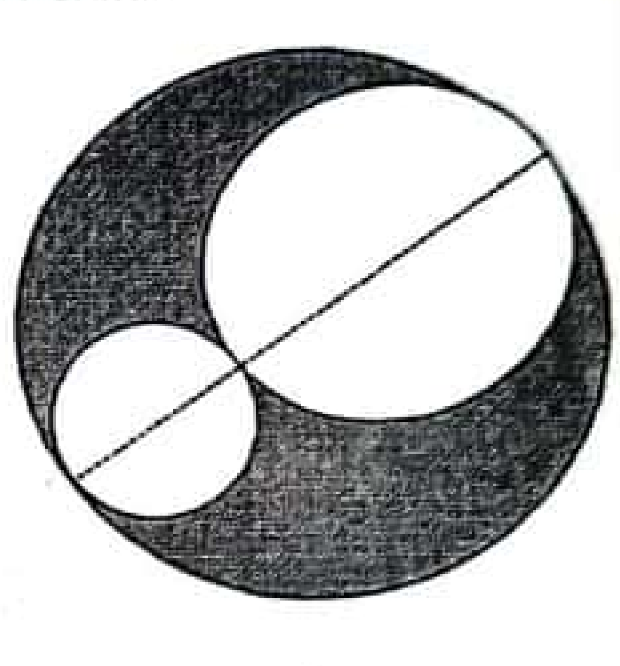
14. (*a*) $x \neq 1$ සඳහා $f(x)=\dfrac{ax+b}{(x-1)^2};(a,b)\in\mathbb{Z}$ යැයි ගනිමු. $f(x)$ හි ව්‍යුත්පන්නය, $f'(x)$ යන්න $x \neq 1$ සඳහා $f'(x)=\dfrac{-(x+a)}{(x-1)^3}$ වන පරිදි a හා b අගයන්න.

ඒ නයින්, $f(x)$ අඩුවන ප්‍රාන්තර හා $f(x)$ වැඩිවන ප්‍රාන්තරය සොයන්න. $f(x)$ හි හැරුම් ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක ද සොයන්න. $x \neq 1$ සඳහා $f''(x)=\dfrac{2(x+2a)}{(x-1)^4}$ **බව දී ඇත.**

ඒ නයින්, $y=f(x)$ ප්‍රස්තාරය උඩු අවතල වන ප්‍රාන්තර හා යටි අවතල වන ප්‍රාන්තරය සොයන්න. $y=f(x)$ ප්‍රස්තාරයේ නතිවර්තන ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක ද සොයන්න. y අක්ෂය මත අන්තඃඛණ්ඩය, ස්පර්ශෝන්මුඛ, හැරුම් ලක්ෂ්‍යය හා නතිවර්තන ලක්ෂ්‍යය දක්වමින් $y=f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

තවදුරටත්, $x\in(-\infty,1)$ වසම තුළ $y=|f(x)|$ හි ප්‍රස්තාරය **අපෝහනය** කරන්න.

(*b*) යාබද රූපයේ දක්වෙන්නේ අරය ඒකක 1ක් වූ වෘත්තාකාර ගෙමිදුලක, එකම විෂ්කම්භයක් මත කේන්ද්‍ර පිහිටියා වූ ද එකිනෙක ස්පර්ශ වන්නා වූ ද වෘත්තාකාර පෙදෙස් දෙකකි. මෙහි අඳුරු කර ඇති පෙදෙසේ තණ කොළ වවා ඇති නම්, තණ පෙදෙසේ වර්ගඵලය A යන්න, $A=2\pi r(1-r)$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න. මෙහි r යනු කුඩා වෘත්තයේ අරය යි. A උපරිම වන පරිදි r අගයා, තණ පෙදෙසේ උපරිම වර්ගඵලය **අපෝහනය** කරන්න.



15. (*a*) සියලු $x\in\mathbb{R}$ සඳහා, $8x^3-2x+4\equiv(Ax+B)(2x-1)^2+B(4x^2-4x+3)(2x-1)+C(4x^2-4x+3)$ වන පරිදි A,B හා C **නිඛිල** අගයන්න. **ඒ නයින්,** $\dfrac{8x^3-2x+4}{(4x^2-4x+3)(2x-1)^2}$ යන්න භින්න භාගවලින් ලියා දක්වා $\displaystyle\int\frac{8x^3-2x+4}{(4x^2-4x+3)(2x-1)^2}dx$ සොයන්න.

AL API (PAPERS

(*b*) $x\in\mathbb{R}^+$ සඳහා, $\dfrac{d\left(\frac{1}{2}\left(2x+(\ln x)^2\right)\right)}{dx}=\dfrac{x+\ln x}{x}$ බව පෙන්වන්න.

කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන් හෝ අන් අයුරකින් හෝ $\displaystyle\int_1^2\frac{x+1}{x}\cdot\frac{2x+(\ln x)^2}{(x+\ln x)^2}\cdot dx=\frac{L(L+6)}{L+2}$ බව සාධනය කරන්න. මෙහි L යනු නිර්ණය කළ යුතු තාත්ත්වික නියතයකි.

(*c*) $n\in\mathbb{Z}$ හා $x\neq(4n\pm1)\dfrac{\pi}{2}$ සඳහා, $\dfrac{1}{1+\sin x}\equiv\sec^2 x-\sec x\cdot\tan x$ බව සාධනය කරන්න.

ඒ නයින්, $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{1}{1+\sin x}\cdot dx=2$; බව පෙන්වන්න. $a,b\in\mathbb{R}$ හා $a<b$ යැයි ගනිමු. $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)\cdot dx$ සූත්‍රය **පිහිටුවන්න.** තවද, $I=\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\cdot\sin x}{1+\sin x}\cdot dx$ බව දී ඇත්නම්, $I=\dfrac{\pi}{2}(\pi-J)$ බව **අපෝහනය** කරන්න. මෙහි $J=\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{1}{1+\sin x}dx$ වේ. **ඒ නයින්,** I අගයන්න.

16. $y=m_1x+n_1$ හා $y=m_2x+n_2$; $m_1\neq m_2$, $m_1>m_2$ යැයි ගනිමු. මෙම සරල රේඛා යුගල අතර **සුළු කෝණය** $\tan^{-1}\left(\dfrac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right)$ බව සාධනය කරන්න. (α,β) ලක්ෂ්‍යයෙහි සිට $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශකයන්ගේ ජ්‍යායේ සමීකරණය $\alpha x+\beta y+(\alpha+x)g+(\beta+y)f+c=0$ බව විවරණය කරන්න.

$x+y=3$ සරල රේඛාව සමඟ $\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{3}\right)$ ක කෝණයක් සාදනු ලබන සරල රේඛා දෙකක් (l_1,l_2) ඇති බව පෙන්වා ඒවායේ අනුක්‍රමණ සොයන්න. ඉහත සරල රේඛා $A\equiv(2,1)$ ලක්ෂ්‍යයේ දී **සංගාමී වන බව** දී ඇත්නම් l_1 හා l_2 සොයන්න. තවද $x+y=3$ මත කේන්ද්‍රය පිහිටියා වූ ද, අරය ඒකක $\sqrt{5}$ ක් වූ ද, $l_1=0$ ස්පර්ශ කරන්නා වූ ද වෘත්ත දෙක (S_1,S_2) සොයන්න. කේන්ද්‍රයේ **පාටිකය ධන අගයක් වූ** වෘත්තය $S=0$ නම්, S **අපෝහනය** කරන්න. A හි සිට $S=0$ ට ඇඳි ස්පර්ශකයේ ජ්‍යායෙහි සමීකරණය ලියා දක්වන්න. $S=0$ හි කේන්ද්‍රය C ද, ස්පර්ශක ජ්‍යාය වෘත්තය ඡේදනය කරනු ලබන ලක්ෂ්‍යය B හා D ද නම් $ABCD$ වෘත්ත චතුරස්‍රයක් වන පරිදි වූ වෘත්තය, $x^2+y^2-9x+3y+10=0$ බව පෙන්වන්න.

17. (*a*) $\sin A$, $\cos A$, $\sin B$ හා $\cos B$ ඇසුරෙන් $\sin(A+B)$ ලියා දක්වන්න.

ඒ නයින්, $\cos(A+B)\equiv\cos A\cdot\cos B-\sin A\cdot\sin B$ බව ලබා ගන්න.

තවදුරටත්, $\sin 2A\equiv 2\sin A\cos A$ හා $\cos 2A\equiv\cos^2 A-\sin^2 A$ බව පෙන්වා,

$\sin 2A\equiv\dfrac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$ හා $\cos 2A\equiv\dfrac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

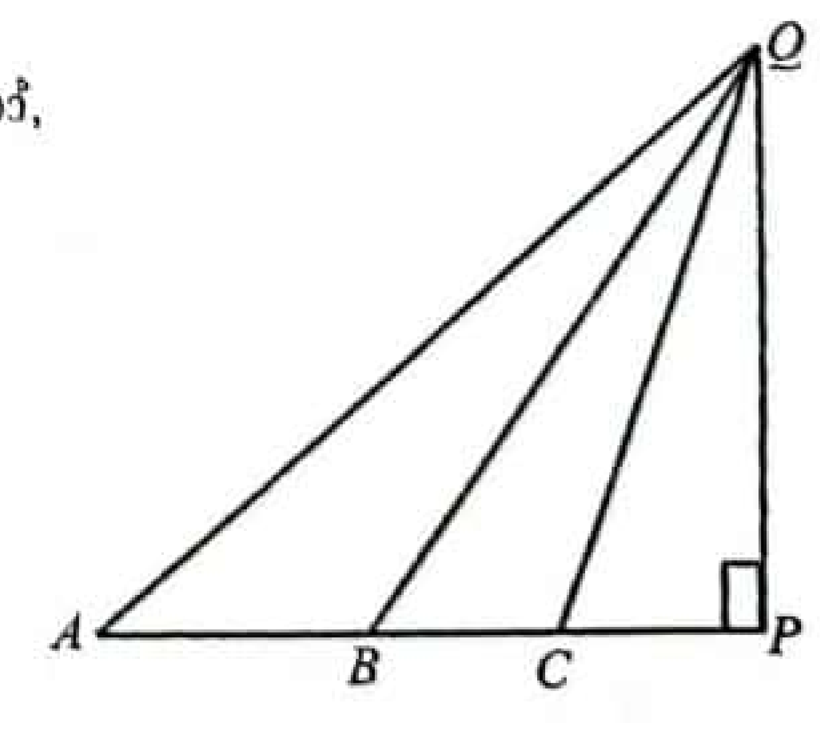
දැන් සියලු $x\in\mathbb{R}$ සඳහා $T(x)\equiv\dfrac{2\tan x(1+\tan x)}{1+\tan^2 x}$ යැයි ගනිමු.

$T(x)\equiv a+b\sin(2x-\alpha)$ වන පරිදි a, b හා α $\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ තාත්ත්වික නියත නිර්ණය කරන්න.

ඒ නයින්, $x\in\left[\dfrac{-\pi}{2},\dfrac{3\pi}{4}\right)$ වසම තුළ $y=T(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

(*b*) ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සුපුරුදු අංකනයෙන් sin **නීතිය** ප්‍රකාශ කරන්න.

PQ ඍජු සිරස් කුළුණක Q මුදුන P තිරස් මට්ටමේ පිහිටි A,B හා C ලක්ෂ්‍යවල දී α, 2α හා 3α ආරෝහණ කෝණවලින් නිරීක්ෂණය වේ.



$BCQ\Delta$ සඳහා sin නීතිය භාවිතයෙන් හෝ අන් අයුරකින් හෝ,

$\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}$ බව පෙන්වන්න. තවදුරටත්

$\dfrac{AB}{BC}=1+2\cos 2\alpha$ බව පෙන්වා,

$AB\leq 3BC$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

(*c*) $x\in\mathbb{R}$ සඳහා, $\tan^{-1}(-x)=-\tan^{-1}x$; බව සාධනය කරන්න.

$\sin^{-1}\left(\dfrac{4x}{x^2+4}\right)+2\tan^{-1}\left(\dfrac{-x}{2}\right)$ යන්න x වලින් **ස්වායත්ත බව** පෙන්වා x ට ගත හැකි තාත්ත්වික අගයයන් සොයන්න.

AL API (PAPERS GROU

23, AL Api
Papers Group
The best group in the telegram